

A.M.	ΕΠΙΘΕΤΟ	ΟΝΟΜΑ	ΕΤΟΣ ΕΓΓΡΑΦΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ  
ΑΝΔΡΕΑΣ ΤΟΛΙΑΣ (ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ) - ΚΥΡΙΑΚΟΣ Γ. ΜΑΥΡΙΔΗΣ (ΛΕΚΤΟΡΑΣ)

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 2**  
**ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΙΟΥΝΙΟΥ**  
**06 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016**

**1. (2.0)** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$g(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt.$$

- (i) Αποδείξτε ότι η  $g$  είναι παραγωγίσιμη και διατυπώστε το θεώρημα που χρησιμοποιήσατε.
- (ii) Εξετάστε αν οι συναρτήσεις  $g$  και  $g'$  είναι **ομοιόμορφα** συνεχείς.
- (iii) Γράψτε το πολυώνυμο Taylor τάξης 5 για τη συνάρτηση  $g$  γύρω από το σημείο  $x_0 = 0$ .

**2. (1.5)** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{3x^2 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx.$$

**3. (1.0)** Ας είναι  $f : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει  $a < 0$  τέτοιο ώστε η  $f$  να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο  $(-\infty, a]$ . Δείξτε ότι η  $f$  είναι ομοιόμορφα συνεχής στο  $(-\infty, 0]$ .

**4. (2.0)** Εξετάστε ως προς την **απόλυτη** σύγκλιση και ως προς την **απλή** σύγκλιση τις παρακάτω σειρές

(i)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k!}{k^k} (-1)^k$

(ii)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1}{k^2+2k} (-1)^k$

(iii)  $\sum_{k=1}^{+\infty} -\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2}$

**5. (1.0)** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x$ . Για κάθε μία από τις διαμερίσεις

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

υπολογίστε τα  $L(P_n, f)$  και  $U(P_n, f)$  και στη συνέχεια, με βάση αυτά, αποδείξτε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι ολοκληρώσιμη και βρείτε το ολοκλήρωμα της σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της.

**6. (2.0)** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(i)  $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx.$

(ii)  $\int_{e^{\frac{\pi}{4}}}^{e^{\frac{3\pi}{4}}} \sin(\log x) dx.$

**7. (1.0)** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x^2 e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται εντός του πρώτου τεταρτημορίου και κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

**8.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = 1 + \int_0^x e^{s^2} ds \log(t+1) dt, \quad x \in [0, 1].$$

- (i) **(0.5)** Χωρίς να υπολογίσετε κανένα ολοκλήρωμα, μελετήστε την  $f$  ως προς τη μονοτονία της.
- (ii) **(0.5)** Χρησιμοποιώντας κατάλληλο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού, αποδείξτε ότι υπάρχει  $\xi \in [0, 1]$  τέτοιο ώστε

$$\int_0^1 f(x)dx = f(1)(1 - \xi).$$

- (iii) **(0.5)** Αποφανθείτε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι ορθός

*“ Η Πρωτεύουσα Τιμή κατά Cauchy της συνάρτησης  $f$  υπάρχει και είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός. ”*

Βαθμολογείται αποκλειστικά και μόνον η αιτιολόγηση.